12.12.2018

Simularea examenului național de bacalaureat 2019 pentru elevii clasei a XII-a
Proba E. c) - Matematică *M_mate-info*

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

• Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
• Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
• Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a+3r=a+15 \Leftrightarrow$	**3p**
	$r=5$	**2p**
2.	$g(-1)=f(-1)=1 \Leftrightarrow$	**3p**
	$b=2$	**2p**
3.	$10^{x^2-2}=5^x\cdot 2^x \Leftrightarrow 10^{x^2-2}=10^x \Leftrightarrow$	**1p**
	$x^2-x-2=0 \Leftrightarrow$	**2p**
	$x=-1$ sau $x=2$	**2p**
4.	Numerele naturale de patru cifre, care au suma cifrelor 33, se scriu o cifră de 9 și trei cifre de 8 sau cu două cifre de nouă, o cifră de de 8 și o cifră de 7 sau cu trei cifre de 9 și o cifră de 6. Numărul cazurilor favorabile este $C_4^1+A_4^2+C_4^1=20$.	**3p**
	Sunt 9000 de numerele naturale de patru cifre, deci sunt 9000 de cazuri posibile	**1p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{20}{9000}=\dfrac{1}{450}$	**1p**
5.	Punctele $A(-1,\ 0)$ și $B(0,-1)$ aparțin dreptei *d*.	**1p**
	Simetricul punctului $A(-1,\ 0)$ față de punctul $P(-3,\ 1)$ este punctul $C(-5,\ 2)$ și simetricul punctului $B(0,-1)$ față de punctul $P(-3,\ 1)$ este punctul $D(-6,\ 3)$.	**2p**
	Dreapta d_1 este dreapta determinată de punctele *C* și *D*, iar ecuația ei este: $y=-x-3$	**2p**
6.	$\left(1+\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=1 \Leftrightarrow \cos\alpha-\sin\alpha=0\ (1)$	**3p**
	$\alpha\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos\alpha\neq 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \mathrm{tg}\alpha=1$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** $\lvert B\rvert=\begin{vmatrix}4&2&1\\6&5&2\\9&6&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&2&1\\-2&1&0\\-7&-2&0\end{vmatrix}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-2&1\\-7&-2\end{vmatrix}=$	**3p**
	$=4+7=11$	**2p**
	b) $A^2=10A$	**2p**
	$BC=CB=I_3+\dfrac{10}{11}A-\dfrac{1}{11}A^2=I_3 \Rightarrow B^{-1}=C$	**3p**

	c) Presupunem că există două matrice $U,\ V\in M_3(\mathbb{C})$, de rang 1, cu proprietatea $U+V=B$	**1p**
	Dacă matricele U și V au rangul egal cu 1, atunci au liniile și coloanele proporționale.	**1p**
	$\lvert U+V\rvert=\begin{vmatrix} x_1+y_1 & x_2+y_2 & x_3+y_3 \\ ax_1+cy_1 & ax_2+cy_2 & ax_3+cy_3 \\ bx_1+dy_1 & bx_2+d_2y_2 & bx_3+dy_3 \end{vmatrix}=0\Rightarrow$	**2p**
	$\det(U+V)\neq\det B,$ contradicție, rezultă că nu există două matrice $U,\ V\in M_3(\mathbb{C})$, de rang 1, cu proprietatea $U+V=B$	**1p**
2.	**a)** $3-4(x-3)(y-3)=3-4(xy-3x-3y+9)=$	**3p**
	$=-4xy+12x+12y-33=x*y,$ pentru orice numere reale x și y	**2p**
	b) $x*e=x,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow 3-4(x-3)(e-3)=x\Leftrightarrow$	**3p**
	$(x-3)(4e-11)=0\Leftrightarrow e=\dfrac{11}{4}\in\mathbb{Q}$	**2p**
	c) Se demonstrează, prin inducție, că $\underbrace{x*x*\ldots*x}_{\text{de } n \text{ ori}}=3+(-4)^{n-1}(x-3)^n\Rightarrow$	**3p**
	$\underbrace{x*x*\ldots*x}_{\text{de 2018 ori}}=x\Leftrightarrow 3-4^{2017}(x-3)^{2018}=x\Leftrightarrow(x-3)\left[4^{2017}(x-3)^{2017}+1\right]=0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x=3$ sau $x=\dfrac{11}{4}$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** $f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}+\dfrac{1}{1+x}=$	**3p**
	$=(1-x)e^{-x}+\dfrac{1}{1+x},\ x\in[0,+\infty).$	**2p**
	b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0\ \Rightarrow\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\ (1)$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+x}=0\ \Rightarrow\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{e^x}+\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)=0\ (2)$	**2p**
	Din (1) și (2) rezultă că graficului funcție f nu admite asimptotă spre $+\infty$.	**1p**
	c) Se consideră funcțiile $g,\ h:[0,+\infty)\to\mathbb{R},\ g(x)=f(x)-a$ și $h(x)=e^x-x^2+1\Rightarrow$ $\Rightarrow g'(x)=f'(x)=\dfrac{h(x)}{(1+x)e^x},\ \forall x\in[0,+\infty)$	**1p**
	$h'(x)=e^x-2x\Rightarrow h''(x)=e^x-2\Rightarrow h''(x)=0\Leftrightarrow x=\ln 2$; $h'(\ln 2)>0\Leftrightarrow e>2$, adevărat (1)	**1p**
	$\begin{array}{c\|ccccc} x & 0 & & \ln 2 & & +\infty \\ \hline h''(x) & -2 & ---- & 0 & +++++++ & \\ \hline h' & 1 & \searrow & 2-2\ln 2 & \nearrow & \end{array}$ (2)	**1p**
	Din (1) și (2) rezultă $\Rightarrow h'(x)>0,\ \forall x\in[0,+\infty)\Rightarrow$ funcția h strict crescătoare $\Rightarrow h(x)\geq h(0)=2,\ \forall x\in[0,+\infty)\Rightarrow$ funcția g strict crescătoare $\Rightarrow$ funcția g este injectivă (3)	**1p**
	Din $g(0)=-a\leq 0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+a)=+\infty,\ g$ funcție continuă și (3) rezultă că pentru orice număr real $a,\ a\geq 0,$ ecuația $f(x)=a$ are o singură soluție.	**1p**
2.	**a)** $F'(x)=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)'=$	**2p**

	$=\dfrac{4}{3+(2x+1)^2}=$	**2p**
	$=\dfrac{4}{3+(2x+1)^2}=\dfrac{1}{x^2+x+1}=f(x)$, rezultă că funcția F este o primitivă a funcției f.	**1p**
	b) $F''(x)=f'(x)=-\dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\Rightarrow$	**2p**
	$F''(x)\le 0,\ \forall x\in\left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ și $F''(x)\ge 0,\ \forall x\in\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]\Rightarrow$	**2p**
	F este convexă pe intervalul $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]$ și concavă pe intervalul $\left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right)\Rightarrow$ că orice primitivă a funcției f are un singur punct de inflexiune.	**1p**
	c) Funcția $H:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ H=F+G$ este derivabilă si $H'(x)=F'(x)+G'(x)=$	**1p**
	$=\dfrac{1}{x^2+x+1}-\dfrac{1}{x^2+x+1}=0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow\exists c\in\mathbb{R}$ astfel încât $H(x)=c,\ \forall x\in\mathbb{R}$ (1)	**2p**
	$H(0)=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\left(\text{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\text{arcctg}\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\sqrt{3}\pi}{3}$ (2)	**1p**
	Din (1) și (2) $\Rightarrow H(x)=\dfrac{\sqrt{3}\pi}{3},\ \forall x\in\mathbb{R}$	**1p**

Succes!